弱 S－嵌入子群与有限群的超可解*

郭桂容[1]，赵　涛[2]
（1. 六盘水师范学院数学系，贵州 六盘水 553004；
2. 山东理工大学理学院，山东 淄博 255049）

摘　要： 群 G 的子群 H 被称为 G 的弱 S－嵌入子群，是指存在 G 的正规子群 T 使得 HT 为 G 的 S－可换子群且 $H \cap T \leqslant H_{se}$，其中 H_{se} 是群 G 含于 H 的一个 S－可换嵌入子群。研究了群 G 的某些素数幂阶弱 S－嵌入子群对其超可解性的影响，同时也得到了关于饱和群系的几个新的刻画。

关键词： S－可换子群；弱 S－嵌入子群；超可解群；饱和群系

中图分类号： O152.1　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 0529－6579（2013）04－0025－04

On the Supersolublity and Weakly S-embedded Subgroups of Finite Groups

GUO Guirong[1], *ZHAO Tao*[2]
（1. Mathematics Department of Liupanshui Normal University, Liupanshui 553004, China;
2. School of Science, Shandong University of Technology, Zibo 255049, China）

Abstract: A subgroup H of G is said to be weakly S-embedded in G, if for some normal subgroup T of G, HT is S-permutable in G and $H \cap T \leqslant H_{se}$, where H_{se} is an S-permutably embedded subgroup of G contained in H. The influence of some weakly S-embedded subgroups on the supersolublity of a finite group G is investigated. And some results about formations are obtained.

Key words: S-permutable subgroup; weakly S-embedded subgroup; supersoluble group; formation

本文所讨论的群均为有限群，使用的符号及术语是标准的（见文［1］）。设 F 为饱和群系，群 G 的子群 H 被称为是 F－可补的是指存在 $L \in F$ 使得 $G = HL$ 成立。此时，我们称 L 是 H 在 G 中的一个 F－补。群 G 的子群 H 被称为是 S－可换的[2]（或 S－拟正规的[3]），若 H 与 G 的每个 Sylow 子群 P 都可换。在文［4］中，作者将其推广为：群 G 的一个子群 H 称为是 G 的 S－可换嵌入子群，如果 H 的每个 Sylow 子群同时也是群 G 的某个 S－可换子群的 Sylow 子群。目前，人们已对这两个概念做了很多的推广。例如，郭教授等[5]引入了几乎 S－正规子群的概念。群 G 的子群 H 被称为是几乎 S－正规的是指存在 $N \trianglelefteq G$ 使得 $HN \trianglelefteq G$ 且 $H \cap T \leqslant H_{se}$，其中 H_{sG} 是群 G 含于 H 的最大 S－可换子群。作为进一步地推广，S－嵌入子群的概念在文［6］中被引入：H 被称为是 G 的 S－嵌入子群是指存在 $N \trianglelefteq G$ 使得 HN 在 G 中 S－可换并且 $H \cap T \leqslant H_{se}$。通过对某些子群的几乎 S－正规性和 S－嵌入性质的研究，人们已经得到了很多有意义的结果（可见文［7－8］等）。最近，在文［9］中作者们引出了以下概念：

群 G 的子群 H 称为 G 的一个弱 S－嵌入子群，如果存在 G 的正规子群 T 使得 HT 为 G 的 S－可换子群且 $H \cap T \leqslant H_{se}$，其中 H_{se} 是群 G 含于 H 的一个 S－可换嵌入子群。

在文［8－9］中，通过假定群 G 的某些素数

* **收稿日期：** 2012－12－03
基金项目： 国家自然科学基金资助项目（10671173）
作者简介： 郭桂容（1974 年生），女；E-mail：lpsggr@126.com

幂阶子群满足弱 S－嵌入性质，作者们已经得到了关于群 G 结构的若干重要刻画。在本文中，我们主要讨论弱S－嵌入子群对群 G 超可解性的影响，得到了几个新的结果。

1 准备知识

引理1[2] 设 H 为群的一个 s－可换子群。则

（i）如果 $N \trianglelefteq G$，则 $H \cap N$ 在G中 s－可换。

（ii）如果 H 是一个 p－群（p 为素数），则有 $N_G(H) \geqslant O^p(G)$。

引理2[10] 假设 P 是群 G 的一个含于 $O_p(G)$ 的 p－子群。如果 P 在 G 中S－可换嵌入，则 P 在 G 中S－可换。

引理3[9] 设 G 为群且有 $H \leqslant K \leqslant G$。

（i）如果 $H \trianglelefteq G$，则 K/H 在 G/H 中弱S－嵌入当且仅当 K 在 G 中弱S－嵌入。

（ii）如果 H 在 G 中弱S－嵌入，则 H 在 K 中弱S－嵌入。

（iii）设 $N \trianglelefteq G$，则对于 G 的满足（$|H|$，$|N|$）$=1$ 的弱S－嵌入子群 H，有 HN/N 在 G/H 中是弱S－嵌入的。

（iv）如果 H 在 G 中弱S－嵌入且 $K \trianglelefteq G$，则存在 G 的一个含于 K 的正规子群 T 使得 HT 在 G 中S－可换且 $H \cap T \leqslant H_{se}$。

引理4[9] 设 p 为 $|G|$ 的最小素因子且 P 为 G 的非循环 Sylow p－子群。若 P 的每个在 G 中无超可解补的极大子群都在 G 中弱S－嵌入，则 G 为 p－幂零群。

引理5[9] 设 N 为 G 的非平凡正规 p－子群。如果 N 的每个极大子群都在 G 中弱S－嵌入，则 N 有一个极大子群在 G 中正规。

2 主要定理及其证明

定理1 群 G 超可解当且仅当存在 G 的正规子群 E 使得 G/E 超可解，且 E 的非循环 Sylow 子群的每个在 G 中无超可解补的极大子群都在 G 中弱S－嵌入。

证明 必要性是明显的，我们只需要证明定理的充分性。假设结论不成立且 G 为使得 $|G||E|$ 为极小的反例。则有

①E 可解且 $Q \trianglelefteq G$，其中 q 是 $|E|$ 的最大素因子且 Q 为 E 的 Sylow q－子群。

设 p 为 $|E|$ 的最小素因子，P 为 E 的 Sylow p－子群。如果 P 为循环群，则根据文［11，Lemma 2.2］可知 E 为 p－幂零群。若 P 非循环，令 P_1 为 P 的一个在 E 中无超可解补的极大子群。易知，P_1 在 G 中也无超可解补。于是根据假设，P_1 在 G 中弱S－嵌入。由引理1知，P_1 在 E 中弱S－嵌入。因此由引理4可知 E 是 p－幂零的。设 K 为 E 的正规 p－补，则根据假设和引理3知 K 的非循环 Sylow 子群的每个在 K 中无超可解补的极大子群都在 K 中弱S－嵌入。于是反复使用上述证明可知 E 为超可解型 Sylow 塔群。特别地，E 可解。令 $q = \max \pi(|E|), Q \in S_yl_p(E)$ 则有 $Q \trianglelefteq G$。

② G 有唯一的一个含于 E 的极小正规子群 N，G/N 超可解且 $\Phi(G)=1$。

令 N 为 G 的一个含于E的极小正规子群。由 E 为可解群知，N 为初等交换 p－群，其中 p 为素数。显然，$(G/N)/(E/N) \cong G/N$ 为超可解群。假设 T/N 为 E/N 的一个非循环的 Sylow r－子群且 T_1/N 为 T/N 的极大子群，其中 r 为 $|E/N|$ 的一个素因子。如果 $r=p$，则 T 为 E 的非循环的 Sylow p－子群且 T_1 为 T 的极大子群。根据假设，T_1 在 G 中有超可解补或 T_1 在 G 中弱S－嵌入。根据引理2可知，T_1/N 在 G/N 中有超可解补或是 T_1/N 在 G/N 中弱S－嵌入。现在假定 $r \neq p$。此时，存在 E 的 Sylow r－子群 R 使得 $T=RN$。令 $R_1=R \cap T_1$，则 R_1 为 R 的极大子群且 $T_1=R_1N$。根据假设，R_1 在 G 中有超可解补或是 R_1 在 G 中弱S－嵌入。根据引理3（iii），T_1/N 在 G/N 中有超可解补或是 T_1/N 在 G/N 中弱S－嵌入。这表明（G/N，E/N）满足定理的条件。于是由 G 的极小性可设 G/N 为超可解群。由于所有超可解群构成一个饱和群系，我们可假定 N 为群 G 含于 E 的唯一极小正规子群且 $N \leqslant\neq \Phi(G)$。因此，$\Phi(G)=1$。

③$N=Q=F(E)=C_E(N)$ 非循环且 $G=[N]M$，其中 M 是 G 的一个极大子群。

由于 $\Phi(G)=1$，故存在 G 的极大子群 M 使得 $G=[N]M$。由 $C=C_E(N)=C_G(N) \cap E \trianglelefteq G$。可知，$(C \cap M)^G=(C \cap M)^{NM}=(C \cap M)^M=C \cap M$。于是 $C \cap M$ 是 G 的正规子群。从而 $C \cap M=1$ 有且 $C=N$。由 $N \leqslant O_q(E) \leqslant F(E) \leqslant F(G) \leqslant C_G(N)$ 知，$N=F(E)=Q$。再根据②得，G/N 超可解。如果 N 循环，则 G 为超可解群，矛盾。

④最终的矛盾。

设 M_q 为 M 的一个 Sylow q－子群且 $G_q=NM_q$。由 $G=[N]M$ 知，G_q 为 G 的 Sylow q－子群。令 Q_1 为 G_q 的一个含于 M_q 的极大子群且 $N_1=N \cap Q_1$，则有 $N_1 \trianglelefteq G_q$。由 $|N:N_1|=|N:N \cap Q_1|=|NQ_1:Q_1|=|G_q:Q_1|=q$ 知，N_1 为 N 的极大子群。令 T

为 N_1 在 G 中的任一补，则有 $G = N_1 T = NT$ 且 $N = N \cap N_1 T = N_1(N \cap T)$ 成立。这表明 $N \cap T \neq 1$。由 $N \cap T \trianglelefteq NT = G$ 且 N 为 G 的极小正规子群知，$N \cap T = N$ 且 $T = G$ 为 N_1 在 G 中的唯一补。因此，可设 N_1 在 G 中无超可解补。根据假设和引理 3（iv）知，存在 $K \trianglelefteq G$ 使得 $N_1 K \leqslant E$ 在 G 中 S－可换且 $N_1 \cap K \leqslant (N_1)_{se}$。由②知 $N \cap K = 1$ 或 $N \leqslant K$。
如果 $N \cap K = 1$，则有 $N_1 = N_1(N \cap K) = N \cap N_1 K$。根据引理 1（i）知，$N_1 = N \cap N_1 K$ 在 G 中 S－可换。如果 $N \leqslant K$，则有 $N_1 = N_1 \cap N \leqslant N_1 \cap K \leqslant (N_1)_{se} \leqslant N_1$。这表明 $N_1 = (N_1)_{se}$ 在 G 中是 S－可换嵌入的。由引理 2，我们也有 N_1 在 G 中是 S－可换的。于是，根据引理 1（ii）知，$N_G(N_1) \geqslant O^q(G)$。另一方面，$N_1 = N \cap Q_1 \trianglelefteq G_q$。于是，$N_1 \trianglelefteq G$。从而有 $N_1 = 1$ 且 $|N| = q$，这与③矛盾。因此，极小阶反例不存在，定理得证。

定理 2　设 F 为包含所有超可解群类 U 的饱和群系。群 $G \in F$ 当且仅当存在 G 的正规子群 E 使得 $G/E \in F$，且 E 的非循环 Sylow 子群的每个在 G 中无超可解补的极大子群都在 G 中弱 S－嵌入。

证明 必要性是明显的，我们只需证明充分性。假设定理结论不成立且 G 是使得 $|G||E|$ 极小的反例。

由于 $E/E = 1$ 超可解，且 E 的非循环 Sylow 子群的每个在 E 中无超可解补的极大子群都在 E 中是弱 S－嵌入的。根据定理 1 可知，E 为超可解群。于是对于 $p = \max \pi(|E|)$ 和 $p \in S_y l_p(E)$，我们有 $P \trianglelefteq G$。现在，设 N 为群 G 含于 P 的一个极小正规子群。显然，$(G/N)/(E/N) \cong G/E \in F$。根据引理 3 知，定理条件对于 G/N 和 E/N 仍成立。由 G 的极小性得 $G/N \in F$。因为 F 为饱和群系，我们可设 N 是群 G 含于 P 的唯一极小正规子群且 $N \leqslant\neq \Phi(G)$。由定理 1（3）中证明可知，$N = O_p(G) = P$。如果 N 为循环群，则由文［12，Lemma 2.16］知 $G \in F$，这与群 G 的选取矛盾。因此我们可设 N 非循环。令 N_1 为 N 的一个极大子群。通过使用一个与定理 1 中第④步类似的证明，我们可推出 N 为循环群从而有 $G \in F$ 成立。

接下来，利用群 G 的某些极小子群的弱 S－嵌入性质，我们也给出了群 G 属于饱和群系的一个充分条件。

定理 3　设 F 为包含 U 的饱和群系，群 G 有一个正规子群 E 使得 $G/E \in F$。假设对于 E 的每个非循环 Sylow 子群 P 均有：

（i）P 的每个极大子群

或

（ii）P 的每个素数阶及 4 阶（如果 P 为非交换 2－群且 $H \subseteq\neq Z_\infty(G)$ 循环子群 H 在 G 中弱 S－嵌入，则 $G \in F$。

证明 假设定理不成立且我们考虑使得 $|G||E|$ 极小的反例 (G, E)。设 P 为 E 的 Sylow p－子群，其中 $p = \max \pi(|E|)$。则有

① E 为 p－幂零群。

如果 P 的每个极大子群都在 G 中弱 S－嵌入，则根据引理 4，我们可知 E 为 p－幂零群。接下来，我们假定 P 的每个素数阶和 4 阶（如果 P 为非交换 2－群且 $H \subseteq\neq Z_\infty(G)$）循环子群 H 都在 G 中弱 S－嵌入。根据引理 3 可知 H 在 E 中弱 S－嵌入。令 K 为 E 的真子群且 $p_0 \in S_y l_p(E)$。则存在某个 $x \in E$ 使得 $P_0^x \leqslant P$。由于 K p－幂零当且仅当 K^x p－幂零。不失一般性，我们可假定 $P_0 \leqslant P$。由于 $Z_\infty(G) \cap K \leqslant Z_\infty(K)$，$P_0$ 的每个素数阶和 4 阶（如果 P_0 为非交换 2－群且 $H \subseteq\neq Z_\infty(G)$）循环子群 H 在 K 中弱 S－嵌入。因此由归纳假设得 K 为 p－幂零群。于是，E 为极小非 p－幂零群。根据文［13，IV，Theorem 5.4］知，E 满足以下性质：

（i）$E = [P]Q$，其中 P 和 Q 分别是 E 的正规 Sylow p－子群和非正规循环 Sylow q－子群；

（ii）$P/\Phi(P)$ 为 E 的主因子；

（iii）P 的方次数是 p 或 4。

令 $X/\Phi(P)$ 为 $P/\Phi(P)$ 的极小正规子群，则存在 $x \in X/\Phi(P)$ 使得 $X/\Phi(P) = \langle x \rangle \Phi(P)/\Phi(P)$ 且 $|\langle x \rangle| = p$ 或 4。根据假设知 $\langle x \rangle \subseteq Z_\infty(E)$ 或 $\langle x \rangle$ 在 E 中弱 S－嵌入。在前一种情形下，我们有 $P \cap Z_\infty(E) \subseteq\neq \Phi(P)$ 成立。于是由（ii）知，$(P \cap Z_\infty(E))\Phi(P) = P$ 从而 $P \leqslant Z_\infty(E)$。但此时 E 为幂零群，矛盾。

现假定 $\langle x \rangle$ 在 E 中弱 S－嵌入。根据引理 3（iv）知，存在 E 的 S－可换子群 C 和正规子群 T 使得 $\langle x \rangle T = C \leqslant P$ 并且 $T \cap \langle x \rangle \leqslant \langle x \rangle_{se}$。如果 $X/\Phi(P)$ 在 $E/\Phi(P)$ 中 S－可换，则容易得到 $X/\Phi(P)$ 在 $E/\Phi(P)$ 中正规。再由 $P/\Phi(P)$ 是 E 的主因子得 $P/\Phi(P) = X/\Phi(P)$ 为循环群。因此，P 循环且 E 为 p－幂零群。此矛盾表明 $X/\Phi(P)$ 在 $E/\Phi(P)$ 中不是 S－可换的。于是，$\langle x \rangle$ 在 E 中也不是 S－可换的。而根据引理 2 知 $\langle x \rangle_{se}$ 在 E 中 S－可换，于是我们有 $1 < T < P$。这表明 $T\Phi(P) \neq P$，从而有 $T \leqslant \Phi(P)$。但此时

$$X/\Phi(P) = \langle x \rangle \Phi(P)/\Phi(P) = \langle x \rangle T\Phi(P)/\Phi(P) = C\Phi(P)/\Phi(P)$$

为 $E/\Phi(P)$ 的 S－可换子群。这个矛盾表明论断①成立。

②$E=P$ 是非循环的。

由①知，E 为 p－幂零群。假设 $P<E$ 且 T 为 E 的正规 p－补，则 $T \trianglelefteq G$。由引理 3，我们可知定理假设对于 G/T（相对于 E/T）仍成立。因此，由 G 的选取知 $G/T \in F$。于是，定理假设对于（G，T）仍成立。再由（G，E）的选取知 $T=E$，矛盾。因为 $G/E \in F$，根据［12，Lemma 2.16］我们可设 P 是非循环的。

③ 如果 P 的每个极大子群都在 G 中弱 S－嵌入，则 $P=G^F$ 是 G 的极小正规子群。

事实上，设 N 为群 G 的一个含于 P 的极小正规子群。根据引理 3 知，假设对于 G/N 仍成立。从而由 G 的选取知，$G/N \in F$。因此可设 N 为群 G 含于 P 的唯一极小正规子群且 $N \subseteq\neq \Phi(G)$。令 M 为群 G 的一个使得 $G=[N]M$ 成立的极大子群，则 $P=P\cap NM=N(P\cap M)$。由 $P\leqslant F(G)\leqslant C_G(N)$ 知 $P\cap M$ 为 G 的正规子群，从而 $P\cap M=1$。于是，我们有 $N=P=G^F$ 成立。

④最终的矛盾。

如果 P 的每个极大子群都在 G 中弱 S－嵌入，则由②和③知 P 是 G 的极小正规子群且 $|P|>p$，这与引理 5 相矛盾。

接下来，我们假定 P 的每个素数阶和 4 阶（如果 P 为非交换 2－群且 $H\subseteq\neq Z_\infty(G)$）循环子群 H 在 G 中弱 S－嵌入。根据（G，E）的选取可设 $P=G^F$ 且 $P\leqslant\neq\Phi(G)$。令 M 为群 G 的一个不包含 P 的极大子群，则有 $M/M\cap P\cong G/P\in F$。根据引理 3 知，假设对于 M 仍成立。因此，由 G 的极小性得 $M\in F$。这表明 G 的每个不含 P 的极大子群都属于群系 F。于是根据文［14，Theorem 3.4.2］知，下列结论成立：

（i）$P/\Phi(P)$ 为 P 的 G－主因子；

（ii）P 的方次数为 p 或 4（若 $p=2$ 且 P 非循环）；

（iii）如果 P 为交换群，则有 $\Phi(P)=1$。

如果 $P/\Phi(P)$ 的每个极小子群都在 $G/\Phi(P)$ 中 S－可换，则 $P/\Phi(P)$ 的每个极大子群也都在 $G/\Phi(P)$ 中 S－可换。因此根据引理 5 知，$|P/\Phi(P)|=p$，这与②矛盾。现在我们选取 $P/\Phi(P)$ 的一个在 $G/\Phi(P)$ 中非 S－可换的极小子群 $X/\Phi(P)$。任取 $x\in X/\Phi(P)$ 且令 $L=\langle x\rangle$，则有 $|L|=p$ 或 4。根据假设知 $L\subseteq Z_\infty(G)$ 或 L 在 G 中弱 S－嵌入。如果 $L\subseteq Z_\infty(G)$，则有 $P\cap Z_\infty(G)\leqslant\neq\Phi(P)$。于是，$(P\cap Z_\infty(G))\Phi(P)=P$，即 $P\leqslant Z_\infty(G)$。因此，我们可得 $|P/\Phi(P)|=p$ 且 P 为循环群，这与②矛盾。下面我们假定 L 在 G 中弱 S－嵌入。由于 $X/\Phi(P)$ 在 $G/\Phi(P)$ 中不是 S－可换的，L 在 G 中非 S－可换。因此根据引理 3（iv），存在 G 的一个含于 P 的非平凡正规子群 T 使得 LT 在 G 中 S－可换且 $T\cap L\leqslant L_{se}=L_{sG}\neq L$。显然，$T\neq P$。因此，$T\Phi(P)\neq P$，即 $T\leqslant\Phi(P)$。此时，我们有

$$X/\Phi(P)=L\Phi(P)/\Phi(P)=LT\Phi(P)/\Phi(P)$$

在 $G/\Phi(P)$ 中是 S－可换的。这个矛盾表明极小反例不存在，从而定理得证。

参考文献：

［1］ GORENSTEIN D. Finite groups［M］. New York：Chelsea，1968.

［2］ KEGEL O H. Sylow-Gruppen und Sbnormalteiler endlicher Gruppen［J］. Math Z，1962，78：205－221.

［3］ DESKINS W E. On quasinormal subgroups of finite groups［J］. Math Z，1963，82(2)：125－132.

［4］ BALLESTER-BOLINCHES A，PEDRAZA-AGUILERA M C. Sufficient conditions for supersolvability of finite groups［J］. J Pure Appl Algebra，1998，127：113－118.

［5］ GUO W，WANG Y，SHI L. Nearly s-normal subgroups of finite group［J］. J Alg Disc Struc，2008，6(2)：95－106.

［6］ GUO W，SHUM K P，SKIBA A N. On solubility and supersolubility of some classes of finite groups［J］. Sci China：Ser A，2009，52(2)：272－286.

［7］ WANG Y，GUO W. Nearly s-normality of groups and its properties［J］. Commun Algebra，2010，38：3821－3836.

［8］ MALINOWSKA I A. Finite groups with sn-embedded or s-embedded subgroups［J］. Acta Math Hungar，2012，136(1/2)：76－89.

［9］ LI J，CHEN G，CHEN R. On weakly S-embedded subgroups of finite groups［J］. Sci China Math，2011，54(9)：1899－1908.

［10］ LI Y，WANG Y，WEI H. On p-nilpotency of finite groups with some subgroups π-quasinormally embedded［J］. Acta Math Hungar，2005，108(4)：283－298.

［11］ WEI H，WANG Y. The c-supplemented property of finite groups［J］. Proc Edinburgh Math Soc，2007，50：493－508.

［12］ SKIBA A N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups［J］. J Algebra，2007，315：192－209.

［13］ HUPPERT B. Endliche Gruppen［M］. New York，Berlin：Springer，1967.

［14］ GUO W. The theory of classes of groups［M］. Beijing-NewYork-Dordrecht-Boston-London：Science Press-Kluwer Academic Publishers，2000.